TEMA 6

MEDIDAS DE FORMA: ASIMETRÍA Y CURTOSIS. MOMENTOS

1. Momentos de una distribución

Los momentos de una distribución son medidas obtenidas a partir de todos sus datos y de sus frecuencias absolutas. Estas medidas caracterizan de tal forma a las distribuciones que si los momentos de dos distribuciones son iguales, diremos que las distribuciones son iguales. Podemos decir que dos distribuciones son más semejantes cuanto mayor sea el número de sus momentos que coinciden.

Se define el **momento de orden h respecto al origen** de una variable estadística como:

$$a_h = x_1^h \frac{n_1}{N} + x_2^h \frac{n_2}{N} + \ldots + x_r^h \frac{n_r}{N} = \sum_{i=1}^{r} x_i^h \frac{n_i}{N}$$

Es inmediato observar que, para h = 1, a_1 es la media de la distribución.

Se defina el **momento central de orden h** o momento respecto a la media aritmética de orden ah como:

$$m_h = (x_1 - \overline{x})^h \frac{n_1}{N} + (x_2 - \overline{x})^h \frac{n_2}{N} + \ldots + (x_r - \overline{x})^h \frac{n_r}{N} = \sum_{i=1}^{r} (x_i - \overline{x})^h \frac{n_i}{N}$$

Es inmediato observar que $m_1 = 0$ y que $m_2 = S^2$

Relaciones entre los momentos

1. $m_2 = a_2 - \overline{x}^2$

2. Los momentos respecto a la media se ven afectados por los cambios de escala, pero no por los cambios de origen. El resto, por ambos.

2. Forma de una distribución

Cuando dos distribuciones coinciden en sus medidas de posición y dispersión, no tenemos datos analíticos para ver si son distintas. Una forma de compararlas es mediante su forma. Bastará con comparar la forma de sus histogramas o diagramas de barras para ver si se distribuyen o no de igual manera.

Para efectuar este estudio de la forma en una sola variable, hemos de tener como referencia una distribución modelo. Como convenio, se toma para la comparación la distribución Normal de media 0 y varianza 1. En particular, es conveniente estudiar si la variable en cuestión está más o menos apuntada que la Normal. Y si es más o menos simétrica que ésta, para lo que se definen los conceptos de Asimetría y Curtosis, y sus correspondientes formas de medida.

3. La asimetría y su medida

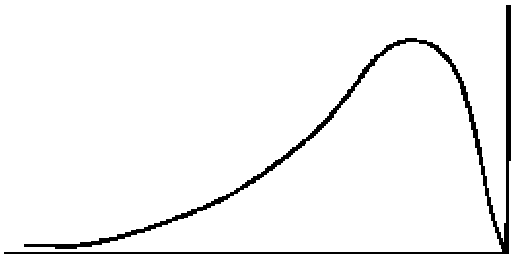
El objetivo de la medida de la asimetría es, sin necesidad de dibujar la distribución de frecuencias, estudiar la deformación horizontal de los valores de la variable respecto al valor central de la media. Las medidas de forma pretenden estudiar la concentración de la variable hacia uno de sus extremos.

Una distribución es simétrica cuando a la derecha y a la izquierda de la media existe el mismo número de valores, equidistantes dos a dos de la media, y además con la misma frecuencia.

Una distribución es **Simétrica** si $\bar{x}$ = Me = Mo

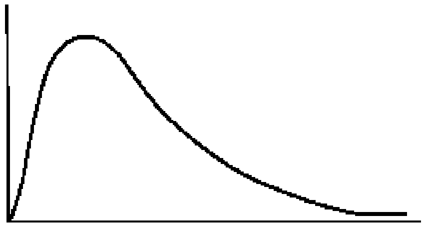
En caso contrario, decimos que la distribución es **Asimétrica**, y entonces puede ser de dos tipos:

Asimétrica a la izquierda. Es el caso en que Mo ≥ Me ≥ $\bar{x}$



Curva Asimétrica a la izquierda

Asimétrica a la derecha. Es el caso en que Mo ≤ Me ≤ $\bar{x}$



Curva Asimétrica a la derecha

Coeficiente de asimetría de Fisher

En una distribución simétrica los valores se sitúan en torno a la media aritmética de forma simétrica. El coeficiente de asimetría de Fisher se basa en la relación entre las distancias a la media y la desviación típica.

En una distribución simétrica $\bar{x}$ = Me = Mo y m_3 = 0. Por eso define como:

$$g_1 = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{r}(x_i - \bar{x})^3 n_i}{N}}{S_x^3} = \frac{m_3}{S_x^3}$$

- Si $g_1 > 0$, la distribución es asimétrica positiva o a la derecha.
- Si $g_1 = 0$, la distribución es simétrica.
- Si $g_1 < 0$, la distribución es asimétrica negativa o a la izquierda.

Coeficiente de asimetría de Pearson

Se basa en el hecho de que en una distribución simétrica, la media coincide con la moda. A partir de este dato se define el coeficiente de asimetría de Pearson como:

$$A_P = \frac{\bar{x} - Mo}{S_x}$$

- Si $A_P > 0$, la distribución es asimétrica positiva o a la derecha.
- Si $A_P = 0$, la distribución es simétrica.
- Si $A_P < 0$, la distribución es asimétrica negativa o a la izquierda.

Este coeficiente no es muy bueno para medir asimetrías leves.

4. La curtosis y su medida

El concepto de curtosis o apuntamiento de una distribución surge al comparar la forma de dicha distribución con la forma de la distribución Normal. De esta forma, clasificaremos las distribuciones según sean más o menos apuntadas que la distribución Normal.

Coeficiente de Curtosis de Fischer

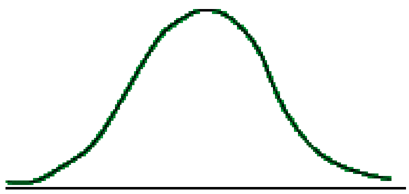
El Coeficiente de Curtosis o Apuntamiento de Fischer pretende comparar la curva de una distribución con la curva de la variable Normal, en función de la cantidad de valores extremos e la distribución. Basándose en el dato de que en una distribución normal se verifica que:

$$\frac{m_4}{\sigma_X^4} = 3$$

se define el Coeficiente de Curtosis de Fisher como:

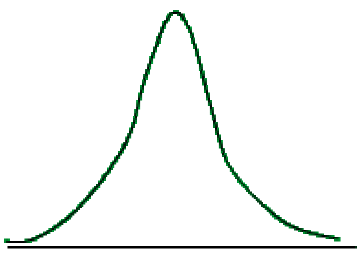
$$K = g_2 = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{r} (x_i - \overline{x})^4 n_i}{N}}{\sigma_X^4} - 3 = \frac{m_4}{S_X^4} - 3$$

Una distribución es **Mesocúrtica** si la distribución de sus datos es la misma que la de la variable Normal. En ese caso, su coeficiente de curtosis es cero.



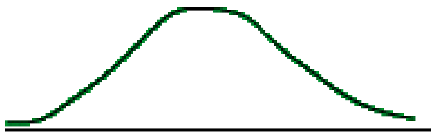
$g_2 = 0$ Distribución Mesocúrtica.

La distribución es **Leptocúrtica** si está más apuntada que la Normal. En ese caso, su coeficiente de curtosis es positivo.



$g_2 > 0$ Distribución Leptocúrtica.

Si la distribución está menos apuntada que la Normal, entonces es **Platicúrtica**, y su coeficiente de Fisher es negativo.



$g_2 < 0$ Distribución Platicúrtica.